Retard des horloges atomiques

23/04/2018

Pascal DUBOIS

Dans la note du 21/11/2019, nous avons vu que l'hypothèse de la conservation de l'énergie par changement de référentiel galiléen conduit à une absence de dilatation du temps entre référentiels. Le retard d'une horloge atomique mise en mouvement par rapport à une horloge restée fixe ou déplacée dans un champ gravitationnel, constaté par les expériences, ne peut alors s'expliquer qu'en admettant que le niveau d'énergie influe sur le rythme de l'horloge.

Si T désigne la période d'une horloge au repos et T' la période de cette même horloge mise en mouvement à la vitesse u, on a :

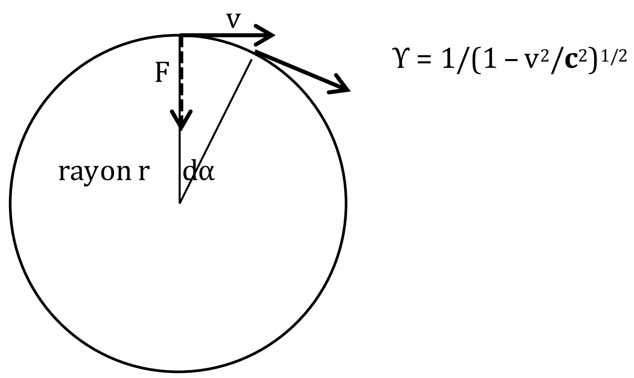
$$T'/T = E'_0/E_0 = \Upsilon = 1/(1- u^2/\mathbf{c}^2)^{1/2}$$

Nous allons montrer que l'on peut expliquer ce résultat par un raisonnement simple.

Rappelons que le fonctionnement d'une horloge atomique repose sur un oscillateur à quartz dont la fréquence est accordée sur la fréquence de transition hyperfine de l'atome de césium.

Détermination de l'énergie de transition

Admettons que les niveaux d'énergie de la transition hyperfine puissent être modélisés par des orbites circulaires de l'électron autour du noyau :



On a les relations : $v = r\, d\alpha/dt$

$$dv = v\, d\alpha \qquad (\ \overrightarrow{dv} \text{ est colinéaire à F})$$

L'électron, de masse m_0, est soumis à une force centripète F. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\Upsilon m_0\, dv/dt = F$$

soit : $\Upsilon m_0 v^2 = r F$

La force F a deux composants :

- l'un résulte du champ électrique, il est de la forme A/r^2 ;
- l'autre est dû au champ magnétique au sein de l'atome[1] ; le terme principal, lié au moment cinétique orbital est de la forme $+ Bv/r^3$ et $- Bv/r^3$ pour l'un et l'autre des niveaux hyperfins.

L'effet du champ électrique étant largement prépondérant, nous traiterons le champ magnétique comme une perturbation se superposant au champ électrique. Avec le champ électrique seul, l'orbite de l'électron est caractérisée par l'équation :

$$\Upsilon m_0 v^2 = A/r \qquad (1)$$

L'ajout du champ magnétique ($+ Bv/r^3$) conduit à une variation de vitesse Δv_1 et à une variation de rayon Δr_1 vérifiant l'équation :

$$2\, \Upsilon\, m_0\, v\, \Delta v_1 = - (A/r^2)\, \Delta r_1 + Bv/r^2 \qquad (2)$$

Nous négligeons la variation de Υ car nous supposons que la vitesse de l'électron reste faible devant celle de la lumière.

D'autre part la variation d'énergie totale de l'électron (somme de l'énergie de masse + cinétique et de l'énergie potentielle électrique) est égale au travail de la force due au champ magnétique dans le déplacement Δr.

Sachant que : $\Delta\Upsilon_1 = \Upsilon^3\, v\, \Delta v_1/\mathbf{c}^2$, cela permet d'écrire :

$$\Upsilon^3\, m_0\, v\, \Delta v_1 + (A/r^2)\, \Delta r_1 = - (Bv/r^3)\, \Delta r_1 \qquad (3)$$

Υ *étant proche de* 1 *et* $\Delta r/r$ *étant petit devant* 1, on tire des équations (2) et (3) les relations :

$$\Upsilon\, m_0\, v\, \Delta v_1 \approx Bv/r^2$$

$$(A/r^2)\, \Delta r_1 \approx - Bv/r^2 \quad \text{soit :} \quad \Delta r_1 \approx - Bv/A \qquad (4)$$

En reportant le résultat (4) dans (3), on voit que la variation d'énergie de l'électron vaut :

$$\Delta E_1 = (B^2/A)\, v^2/r^3$$

Le même raisonnement appliqué à l'autre niveau hyperfin ($- Bv/r^3$) conduit à :

$$\Delta E_2 = - (B^2/A)\, v^2/r^3$$

L'énergie de transition entre niveaux hyperfins est donc :

$$\Delta E_t = \Delta E_1 - \Delta E_2 = 2\, (B^2/A)\, v^2/r^3 \qquad (5)$$

[1] La transition hyperfine correspond à l'inversion de l'interaction entre le dipôle magnétique nucléaire et le dipôle magnétique lié au moment cinétique orbital et au spin de l'électron.

Incidence de la variation de masse au repos

L'équation (1) peut s'écrire :

$$(\Upsilon - 1/\Upsilon)\ m_0\ \mathbf{c}^2 = A/r$$

L'énergie totale de l'électron est donc :

$$\Upsilon\ m_0\ \mathbf{c}^2 - A/r\ =\ m_0\ \mathbf{c}^2/\Upsilon$$

Supposons que, du fait de la mise en mouvement ou du déplacement de l'atome dans un champ gravitationnel, la masse au repos de l'électron soit portée à la valeur m_0'.

A cette variation de masse est associé un apport d'énergie égal à : $(m_0' - m_0)\ \mathbf{c}^2$

On peut donc écrire : $m_0'\ \mathbf{c}^2/\Upsilon' - m_0\ \mathbf{c}^2/\Upsilon = (m_0' - m_0)\ \mathbf{c}^2$

ce qui conduit à: $m_0'\ (1 - 1/\Upsilon') = m_0\ (1 - 1/\Upsilon)$

v *et* v' *étant petits devant* $\mathbf{c}$, la relation ci-dessus s'écrit aussi :

$$m_0'\ v'^2\ \approx\ m_0\ v^2 \qquad (6)$$

Revenons maintenant à la relation (5). Le ratio entre énergies de transition après et avant modification de la masse au repos est :

$$\Delta E_t'/\ \Delta E_t = (v'^2/r'^3)/\ (v^2/r^3) = (v'^2/v^2)/(r'^3/r^3)$$

L'équation (1) montre que 1/r varie comme $m_0\ v^2$. Compte tenu de (6), (r'^3/r^3) reste donc proche de 1 et l'équation ci-dessus devient :

$$\Delta E_t'/\ \Delta E_t \approx\ v'^2/v^2 = m_0/m_0'$$

ce qui constitue bien le résultat recherché puisque $\Delta E_t'/\ \Delta E_t$ représente le ratio des fréquences de l'horloge.