Champ gravitationnel, Principe fondamental de la dynamique et Mécanique quantique

Champ gravitationnel,

08/12/2023

Principe fondamental de la dynamique

et Mécanique quantique

Pascal DUBOIS

Mots-clés : champ gravitationnel ; gravitation ; interaction gravitationnelle ; énergie gravitationnelle ; principe fondamental ; dynamique ; mécanique quantique ; mécanique ondulatoire ; onde gravitationnelle ; onde pilote ; rayon de Schwarzschild ; hypothèse ; de Broglie

Résumé :

Dans la note intitulée *« Une autre approche de la relativité »* nous avons défini des lois de la gravitation basées sur des considérations énergétiques. La présente note a d'abord pour objet de présenter un modèle de champ gravitationnel en cohérence avec ces lois.

Nous attribuons une réalité physique au champ gravitationnel, considéré comme une distribution d'énergie dans l'espace entier. L'interaction gravitationnelle consiste en un échange d'énergie entre les sources gravitationnelles et le champ global créé par ces sources.

Le modèle de champ gravitationnel prévoit un mécanisme de rafraîchissement du champ, qui adapte en permanence ce dernier aux variations d'énergie de sa source. Ce mécanisme met en œuvre des ondes gravitationnelles constituant un système que l'on peut considérer comme équivalent à la masse de la source.

Le deuxième chapitre vise à répondre à la question suivante : peut-on déduire le principe fondamental de la dynamique des propriétés attribuées au champ gravitationnel ?

Cette question repose sur l'idée que, si un corps est au repos dans un référentiel galiléen, c'est qu'il est en équilibre avec son propre champ gravitationnel. Une impulsion appliquée à ce corps se traduit par sa mise en mouvement et l'augmentation de son énergie, laquelle entraîne une modification du champ gravitationnel. Et la variation de vitesse est liée à la variation du champ gravitationnel. D'où la liaison entre la variation de vitesse et la variation d'énergie, qui conduit au principe fondamental de la dynamique.

Le troisième chapitre cherche à rattacher le concept de dualité onde-particule de la Mécanique quantique au concept de champ gravitationnel.

On montre que les caractéristiques de l'onde gravitationnelle qui accompagne une particule en mouvement lui permettent de jouer le rôle d'onde pilote (en référence au concept introduit par la théorie de Louis de Broglie) et d'expliquer ainsi le comportement ondulatoire de la particule. Cette onde pilote est solution d'une équation proche de l'équation de Schrödinger.

Finalement le mouvement d'une particule apparaît entièrement commandé par le champ gravitationnel qui lui est associé.

Et une porte est ouverte vers une autre approche de la Mécanique quantique.

1. *Propriétés du champ gravitationnel*

1.1. Principes

1.1.1. Nouvelle approche de la relativité

Rappelons en premier lieu que nous nous plaçons dans le cadre d'une nouvelle approche de la relativité restreinte basée sur l'hypothèse suivante : **la propriété des particules de matière, invariante par changement de référentiel galiléen, est l'énergie totale (au sens einsteinien : $\mathrm{E} = \mathrm{m}\mathbf{c}^2$) et non la masse au repos.**

Avec cette hypothèse les distances et les durées sont conservées lors d'un changement de référentiel. Le retard des horloges en mouvement n'est pas dû à une dilatation du temps, mais à une augmentation de leur énergie par rapport aux horloges restées fixes.

Nous postulons que la masse au repos varie également lorsque la particule subit une variation d'énergie potentielle dans un champ gravitationnel. [1] C'est ce qui explique le décalage gravitationnel des horloges.

C'est à partir de ce postulat qu'ont été définies de nouvelles lois de la gravitation ne nécessitant pas d'avoir recours à une courbure de l'espace-temps.[2] *Les principes qui sous-tendent ces lois sont rappelés en annexe.*

1.1.2. Principe d'interaction gravitationnelle

Dans la théorie de la gravitation newtonienne, l'attraction gravitationnelle est modélisée par l'intermédiaire d'un champ vectoriel $\vec{G}(\vec{r})$ proportionnel à la masse source du champ et variant en raison inverse du carré de la distance. Le champ global créé par plusieurs sources est obtenu par addition vectorielle des champs individuels.

Notre nouvelle approche conserve le principe de décroissance en $1/\mathrm{r}^2$, en revanche ce ne sont plus les masses au repos des sources gravitationnelles qui sont prises en compte, mais leurs énergies totales.

Le champ gravitationnel, qui a une réalité physique, est considéré comme une distribution d'énergie dans l'espace entier. L'interaction gravitationnelle consiste en un échange d'énergie entre les sources gravitationnelles et le champ global créé par ces sources. [3]

---

[1] Nous verrons, au paragraphe 2.3, qu'il est possible de justifier cette hypothèse à partir des propriétés du champ gravitationnel.

[2] Ces lois permettent de prédire les résultats des expériences considérées comme tests de la théorie de la relativité générale (cf. note intitulée *« Une autre approche de la relativité »*). En conclusion, cette note explique les similitudes et différences avec la relativité générale.

[3] Le champ vectoriel n'est plus posé comme principe ; nous verrons que l'on peut cependant simuler l'interaction par un champ vectoriel se différenciant du champ newtonien en ce qui concerne l'énergie associée.

1.1.3. Rafraîchissement du champ gravitationnel

Nous supposons qu'un rafraîchissement du champ s'effectue de façon périodique à partir de deux ondes se déplaçant à la vitesse c :

- **l'une propageant depuis la source de l'énergie qu'elle cède progressivement au champ ;**
- **l'autre propageant vers la source l'énergie qu'elle prélève sur le champ.**

Nous désignerons ces ondes par le terme d'«ondes gravitationnelles». [4]

Le champ apparaît ainsi comme la résultante de ces déplacements d'énergie. Il s'ajuste en permanence à l'énergie de la source gravitationnelle.

1.2. Modèle de champ gravitationnel

Nous considérons le champ gravitationnel (supposé sphérique) associé à une masse m au repos dans un référentiel galiléen. La masse source a pour énergie : $W = m\,\mathbf{c}^2$.

1.2.1. Rappel du modèle newtonien

En un point situé à la distance r de la source, le vecteur champ gravitationnel s'écrit :

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\,(Gm/r^2)\,\vec{u} \qquad (1.1)$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire selon la direction radiale $\vec{r}$.

La force appliquée à une particule de masse m' soumise à l'attraction gravitationnelle s'écrit :

$$\vec{F} = m'\,\vec{G}(\vec{r}) = -\,(Gmm'/r^2)\,\vec{u} \qquad (1.2)$$

Le champ vectoriel gravitationnel dérive d'un potentiel V(r) :

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\,\overrightarrow{grad}\,(V) \quad \text{avec} \quad V(r) = -\,Gm/r \qquad (1.3)$$

Le potentiel est pris nul à l'infini et l'énergie potentielle est donc négative.

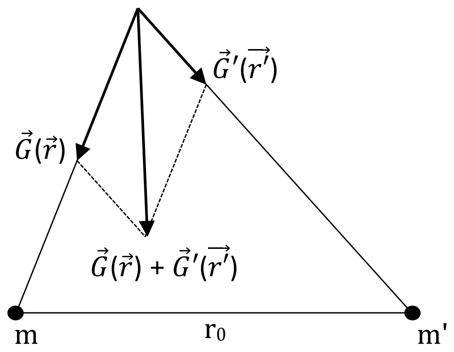
La variation d'énergie potentielle de la particule de masse m' vaut :

$$dE_g = (Gmm'/\,r^2)\,dr \qquad (1.4)$$

[4] Ces ondes diffèrent des ondes gravitationnelles de la Relativité générale.

Energie du champ

Nous allons montrer qu'il est possible d'introduire dans le modèle newtonien une énergie d'interaction du champ de deux sources gravitationnelles, assimilable à l'opposé de l'énergie potentielle.



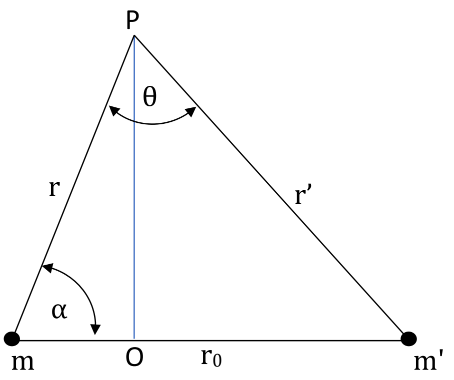
Considérons deux masses m et m' séparées par une distance r_0. Ces masses créent les champs gravitationnels $\vec{G}(\vec{r})$ et $\overrightarrow{G'}(\overrightarrow{r'})$ dont la résultante est la somme vectorielle $\vec{G}(\vec{r}) + \overrightarrow{G'}(\overrightarrow{r'})$.

Supposons que, comme pour le champ électrique, on puisse attribuer, en chaque point du champ résultant, une densité d'énergie proportionnelle au carré de la norme du vecteur champ :[5]

$$\delta E(r,r') = k \, \| \vec{G}(\vec{r}) + \overrightarrow{G'}(\overrightarrow{r'}) \|^2 = k \, \| \vec{G}(\vec{r}) \|^2 + k \, \| \overrightarrow{G'}(\overrightarrow{r'}) \|^2 + 2k \, \vec{G}(\vec{r}) \, \overrightarrow{G'}(\overrightarrow{r'}) \qquad (1.5)$$

L'énergie totale du champ est obtenue par intégration sur l'espace entier. Intéressons-nous à la variation de cette énergie avec r_0.

Les deux premiers termes ne dépendent pas de r_0. Seul le troisième terme $[2k \, \vec{G}(\vec{r}) \, \overrightarrow{G'}(\overrightarrow{r'})]$ de l'équation (1.5), que l'on peut considérer comme une densité d'énergie d'interaction δE_i, est susceptible d'apporter une contribution.



Posons θ = angle $(\vec{r}\,,\overrightarrow{r'})$

Compte tenu de la relation (1.1) :

$$2k \, \vec{G}(\vec{r}) \, \overrightarrow{G'}(\overrightarrow{r'}) = 2k \, G^2 \, mm' \, (\cos\theta / r^2 r'^2)$$

Les deux coques sphériques centrées en m et m', de rayon et épaisseur respectifs (r, dr) et (r', dr') ont en commun un anneau cylindrique :
de rayon : OP = $r \sin\alpha$ et de section : $dr \, dr'/\sin\theta$.

Cherchons la quantité d'énergie d'interaction dE_c contenue dans la coque (r, dr) par intégration par rapport à r'.

L'intégrale de $(\cos\theta / r^2 r'^2)$ s'écrit : $\int (2\pi \, r \sin\alpha \cos\theta / r^2 r'^2 \sin\theta) \, dr'$

Puisque $\sin\alpha / r' = \sin\theta / r_0$, elle se ramène à : $\int (2\pi \cos\theta / r_0 r r') \, dr'$

On sait que (relation dans le triangle mPm'): $\cos\theta = (r^2 + r'^2 - r_0^2) / 2rr'$

[5] cf. par exemple : L. Brillouin, *L'énigme E = mc² : énergie potentielle et renormalisation de la masse*, Le journal de Physique, Tome 25, 1963.

Finalement l'énergie d'interaction dE_c est la somme de deux termes :

$$dE_c(r) = (2k\,\pi\,G^2\,mm'/r_0)\,(A + B)\,dr$$

avec : $A = (1/r^2) \int dr'$

$$B = (1 - r_0^2/r^2) \int (1/r'^2)\,dr'$$

La plage d'intégration[6] est : pour $r < r_0$: $r_0 - r \le r' \le r_0 + r$

pour $r > r_0$: $r - r_0 \le r' \le r + r_0$

Le résultat est le suivant :

- pour $r < r_0$: $A + B = 0$ Dans toute coque de rayon inférieur à r_0, l'énergie d'interaction est nulle ;
- pour $r > r_0$: $A + B = 4\,r_0/r^2$ L'énergie d'interaction contenue dans la coque (r, dr) vaut :

$$dE_c(r) = (2k\,\pi\,G^2\,mm'/r_0)(4\,r_0/r^2)\,dr = (8k\,\pi\,G^2\,mm'/r^2)\,dr$$

En intégrant par rapport à r on obtient l'énergie d'interaction totale :

$$E_i = \int_{r0}^{\infty} dEc(r)\,dr = 8k\,\pi\,G^2\,mm'/r_0$$

La variation de l'énergie d'interaction avec r_0 s'écrit :

$$dE_i = -\,(8k\,\pi\,G^2\,mm'/r_0^2)\,dr_0 \tag{1.6}$$

Cette expression peut être identifiée à l'opposé de la variation d'énergie potentielle (1.4) en choisissant :

$$k = 1/8\pi G$$

L'énergie d'interaction totale vaut alors :

$$E_i = G\,mm'/r_0 \tag{1.7}$$

C'est l'énergie qu'il faut dépenser pour éloigner les sources à l'infini l'une de l'autre.

Les termes $[k \,\|\, \vec{G}(\vec{r})| \,\|^2]$ et $k\,[\|\, \overrightarrow{G'}(\overrightarrow{r'})\,\|^2]$ de l'équation (1.5) sont interprétés comme l'énergie des champs créés par les masses m et m' supposées isolées.

---

[6] Nous verrons au paragraphe suivant que le champ ne peut être défini qu'à une distance minimale de la source (il devient infini quand r tend vers 0).
En toute rigueur, le domaine d'intégration doit donc exclure : pour r, une boule de rayon R_g centrée sur m ; pour r', une boule de rayon R_g' centrée sur m'. On suppose ici $r_0 \gg R_g$ et R_g'.

1.2.2. Nouveau modèle de champ

Energie du champ créé par une source isolée

Désignons par W_g l'énergie totale du champ et par $\delta W_g(r)$ la densité d'énergie de celui-ci.

L'énergie du champ décroît en $1/r^2$.

Plus exactement l'énergie contenue dans une coque sphérique de rayon r et d'épaisseur dr est proportionnelle à W_g/r^2 :

$$dE_c = 4\pi\, r^2\ \delta W_g(r)\, dr = K\, (W_g/r^2)\, dr$$

Pour que l'énergie du champ soit finie, elle doit être définie sur l'espace extérieur à une sphère centrée sur la source ; soit R_g le rayon de cette sphère.

$$\int_{Rg}^{\infty} K\, (W_g/r^2)\, dr = W_g \qquad \text{ce qui entraîne :} \quad K = R_g$$

Donc : $$dE_c = (R_g/r^2)\, W_g\, dr \tag{1.8}$$

La densité d'énergie s'écrit :

$$\delta W_g(r) = (R_g/4\pi\, r^4)\, W_g \tag{1.9}$$

Energie potentielle

Les lois de la gravitation que nous avons proposées ont été établies dans l'hypothèse où l'on peut négliger l'influence de la particule soumise au champ gravitationnel sur la source du champ. Cette source est supposée fixe dans un référentiel galiléen et de masse invariable : son champ est celui d'une source isolée.

En nous référant aux résultats expérimentaux, nous avons postulé que la variation d'énergie potentielle d'une particule d'énergie W' à la distance r de la source du champ gravitationnel vaut :

$$dE_g = 2\, (Gm/\,\mathbf{c}^2 r^2)\, W'(r)\, dr \tag{1.10}$$

L'introduction du coefficient multiplicateur 2 par rapport à l'expression newtonienne est due à l'hypothèse de non-invariance de la masse au repos : dans notre modèle, la moitié de la variation de l'énergie potentielle est en effet affectée à la variation de l'énergie au repos de la particule en interaction et l'autre à la variation de la quantité de mouvement (cf. annexe).

Le potentiel est le double du potentiel newtonien :

$$V(r) = -\, 2\, Gm/r \tag{1.11}$$

D'autre part, à la différence de la théorie newtonienne, l'énergie W' (qui est l'énergie totale) varie avec la distance de la particule par rapport à la source. D'où la notation $W'(r)$.

De la demi-énergie potentielle on peut déduire la force appliquée à la particule pour traduire l'attraction gravitationnelle, qui s'écrit :

$$\vec{F} = - (\mathrm{GmW'(r)}/\mathbf{c}^2\mathrm{r}^2)\ \vec{u}$$

On peut donc encore considérer que $\vec{F}$ se déduit du vecteur champ gravitationnel :

$$\vec{G}(\vec{r}) = - (\mathrm{GW}/\mathbf{c}^2\mathrm{r}^2)\ \vec{u} \qquad (1.12)$$

Ce vecteur est le même que celui du champ newtonien, à la différence près que c'est l'énergie totale W et non la masse qui est prise en compte.

Interaction de deux sources

Reprenons le raisonnement tenu au paragraphe 1.2.1 à partir de l'équation (1.5) avec le champ défini par l'équation (1.12).[7] Pour que l'énergie soit doublée, il faut doubler la valeur du coefficient k.

Avec $\mathrm{k} = 1/4\pi\mathrm{G}$, l'énergie d'interaction devient (doublement de la valeur donnée par (1.6)) :

$$\mathrm{dE_i} = - 2\ (\mathrm{GW}/\ \mathbf{c}^4\mathrm{r}^2)\ \mathrm{W'(r)\ dr} \qquad (1.13)$$

Elle est bien l'opposée de l'énergie potentielle donnée par l'équation (1.10).
Cette relation n'est valable que si l'on peut négliger l'effet de la variation de W'(r) *dans le calcul de* $\mathrm{dE_i}$, *c'est-à-dire à grande distance de la source.*

Nous postulons que l'on peut assimiler les termes $[\mathrm{k}\ \|\ \vec{G}(\vec{r})\ \|^2]$ et $[\mathrm{k}\ \|\ \overrightarrow{G'}(\vec{r})\ \|^2]$ **à la densité d'énergie des champs créés par les masses** m **et** m' **considérées comme isolées.**

Donc : $\delta\mathrm{W_g(r)} = \mathrm{G\ W^2}/4\pi\ \mathbf{c}^4\ \mathrm{r4}$

Par rapprochement avec l'équation (1.9) on obtient la valeur de $\mathrm{R_g}$:

$$\mathrm{R_g} = \mathrm{G\ W^2}/\ \mathbf{c}^4\mathrm{W_g}$$

Si l'énergie du champ est égale à la moitié de l'énergie de la source ($\mathrm{W_g} = \mathrm{W}/2$), la valeur de $\mathrm{R_g}$ est :

$$\mathrm{R_g} = 2\ \mathrm{G\ W}/\ \mathbf{c}^4 = 2\ \mathrm{Gm}/\mathbf{c}^2 \qquad (1.14)$$

Nous verrons au paragraphe 1.3.1 que le modèle de rafraîchissement du champ que nous imaginons permet de conforter l'hypothèse ci-dessus.

$\mathrm{R_g}$ **n'est autre que le rayon de Schwarzschild. Le modèle de champ gravitationnel que nous venons d'établir fait donc apparaître ce rayon comme la limite en deçà de laquelle ne s'exerce plus d'action gravitationnelle.**[8]

---

[7] Au paragraphe 1.3.2, nous verrons qu'il est possible d'expliquer l'interaction entre sources à partir du mécanisme de rafraîchissement du champ, sans introduire de champ vectoriel.

[8] Cela n'est pas étonnant puisque, dans la comparaison faite entre notre approche de la gravitation et la théorie de la relativité générale, nous nous référons à la métrique de Schwarzschild, qui est précisément définie à l'extérieur de la sphère de rayon $\mathrm{R_g}$.

1.3. Mécanisme de rafraîchissement du champ gravitationnel

1.3.1. Emission et réception d’énergie

En application du principe retenu au paragraphe 1.1.3 nous considérons, dans un référentiel où une source gravitationnelle isolée est au repos, deux ondes sphériques de vitesse égale à $\mathbf{c}$, l’une propageant l’énergie vers le champ (onde sortante), l’autre propageant l’énergie vers la source (onde entrante).

Nous supposons en outre que la cession et le prélèvement d’énergie sur le champ se font en alternance pendant des durées égale à une période T.

De ce fait, dans chaque coque sphérique d’épaisseur $\mathbf{c}\mathrm{T}$, l’énergie du champ fluctue entre l’énergie fournie par l’onde sortante et une valeur nulle. Nous supposerons que l’énergie totale moyenne du champ est égale à la moitié de l’énergie émise ou reçue à la limite de Schwarzschild.

Au paragraphe 1.2.2 nous avons fait l’hypothèse que l’énergie du champ est égale à la moitié de l’énergie de la source. **L’énergie des ondes gravitationnelles sortante ou entrante est donc égale à l’énergie de la source.**

Postulons maintenant que : $\mathbf{c}\mathrm{T} = \mathrm{R_g}$ (donc $\mathrm{T} = \mathrm{R_g}/\mathbf{c} = 2\ \mathrm{Gm}/\mathbf{c}^3$). [9] (1.15)

Le schéma ci-dessous illustre l’oscillation du champ gravitationnel créée par la cession et le prélèvement d’énergie alternés dans des coques sphériques d’épaisseur $\mathrm{R_g}$:

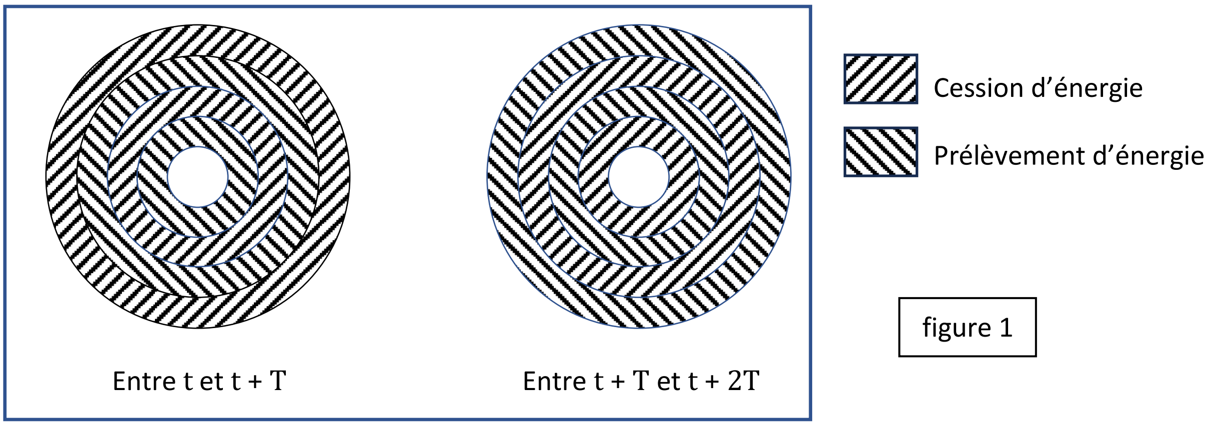


figure 1

Rappelons que l’énergie du champ décroît en $1/\mathrm{r}^2$ et que l’énergie transportée par les ondes gravitationnelles varie en $1/\mathrm{r}$. Dans un référentiel où la source est au repos, la conjugaison de ces ondes ne déplace pas d’énergie, mais provoque simplement une oscillation du champ.

On peut considérer le système d’ondes gravitationnelles comme équivalent à la masse de la source.[10]

---

[9] Nous verrons au chapitre 2 que ce choix permet de déduire le principe fondamental de la dynamique de cette propriété du champ gravitationnel.

[10] Sur des bases différentes, G. La Frenière a exprimé l’idée que la matière est faite d’ondes : http://web.archive.org/web/20110901223405/http://glafreniere.com/matter.htm

1.3.2. Sources en interaction : échange d'énergie entre sources et champ

Nous sommes maintenant en mesure de proposer un mécanisme d'échange d'énergie entre sources et champ gravitationnel expliquant l'énergie potentielle.

Nous considérons deux sources de masses m et m' séparées par une distance r_0.

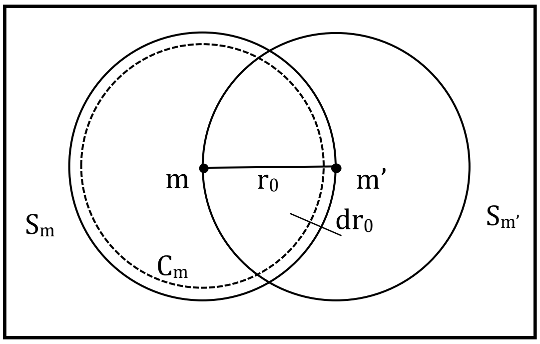


figure 2

Au paragraphe 1.2.1 nous avons vu que l'énergie d'interaction est nulle à l'intérieur des sphères S_m et $S_{m'}$ de rayon r_0. Cela veut dire que :

- la source m' n'interfère pas avec le champ de m à l'intérieur de la sphère S_m ;
- la source m n'interfère pas avec le champ de m' à l'intérieur de la sphère $S_{m'}$;

Supposons que les sources de masses m et m' se rapprochent l'une de l'autre d'une distance $|dr_0|$.

La variation d'énergie d'interaction est due au prélèvement d'énergie :

- de la source m' sur le champ, créé par m, contenu dans la coque C_m de centre m, rayon r_0 et épaisseur $|dr_0|$; l'énergie de cette coque vaut : $(R_g/r_0^2)\ W\ |dr_0|$; [11]

- de la source m sur le champ, créé par m', contenu dans la coque $C_{m'}$ de centre m', rayon r_0 et épaisseur $|dr_0|$; l'énergie de cette coque vaut : $(R_g'/r_0^2)\ W'\ |dr_0|$;

Pour la source m, le prélèvement d'énergie se fait en une durée T proportionnelle à l'énergie W; de même, pour la masse m', le prélèvement se fait en une durée T' proportionnelle à W'. Nous admettrons que le prélèvement d'énergie se fait en proportion des durées de prélèvement :

$$W/(W + W') \quad \text{et} \quad W'/(W + W').$$

Les énergies prélevées valent donc :

- pour la source m' : $(W'/(W+W'))(R_g/r_0^2)\ W\ |dr_0| = 2\ G\ (W^2W'/(W+W'))/\mathbf{c}^4 r_0^2\ |dr_0|$ (1.16)
- pour la source m : $(W/(W+W'))(R_g'/r_0^2)\ W'\ |dr_0| = 2\ G\ (W'^2W/(W+W'))/\mathbf{c}^4 r_0^2\ |dr_0|$

En raison du rafraîchissement continu des champs, l'énergie de ceux-ci est rétablie en permanence. Cela explique que l'on peut considérer l'énergie prélevée par une source sur le champ de l'autre comme une énergie d'interaction s'ajoutant aux énergies des champs des sources isolées.

[11] Pour déterminer l'énergie prélevée il faut prendre en compte la valeur maximale (W) de l'énergie du champ.

La variation d'énergie d'interaction est la somme des deux termes ci-dessus, soit :[12]

$$dE_i = -2\,(G\,WW'/\mathbf{c}^4 r_0^2)\,dr_0 = -2\,(G\,mm'/r_0^2)\,dr_0$$

Dans le cas où nous nous plaçons (m >> m'), l'énergie d'interaction est entièrement captée par m'. On retrouve bien l'opposé de la variation d'énergie potentielle de cette particule (cf. équation (1.10)).

La méthode peut être étendue à l'interaction d'un nombre quelconque de sources.

1.3.3. Photons dans un champ gravitationnel

Nous avons admis que le phénomène d'échange d'énergie entre un champ gravitationnel et une particule de masse non nulle pouvait être transposé aux photons.[13] Comment l'expliquer ?

Nous faisons l'hypothèse que les ondes électromagnétiques ont la même capacité d'échange d'énergie avec le champ gravitationnel que les ondes gravitationnelles.

Un photon d'énergie E_φ , qui peut être considéré comme un fragment d'une onde électromagnétique, a donc aussi cette capacité. En supposant que ce photon appartient à une onde électromagnétique sphérique d'énergie totale $N\,E_\varphi$, l'équation (1.15) du paragraphe précédent devient :

$$N|d\,E_\varphi| = (\,NE_\varphi\,/(W+N\,E_\varphi))(R_g/r_0^2)\,W\,|dr_0|$$

Donc : $$|d\,E_\varphi| = (E_\varphi\,/(W+N\,E_\varphi))(R_g/r_0^2)\,W\,|dr_0| \approx E_\varphi\,(R_g/r_0^2)\,|dr_0| \quad (\text{si } W \gg N\,E_\varphi) \qquad (1.16)$$

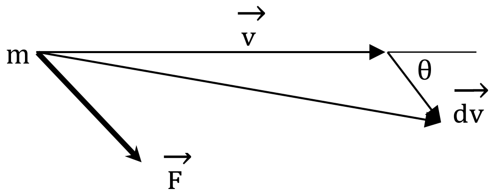
ce qui constitue bien l'équation donnant la variation d'énergie du photon.

[12] On retrouve bien la valeur donnée par l'équation (1.13), tirée de la densité d'énergie du champ moyen.
[13] cf. note intitulée *« Une autre approche de la relativité »* paragraphe 5.1.3.

2. *Champ gravitationnel et Principe fondamental de la dynamique*

2.1. Equation fondamentale de la dynamique

Considérons un corps de masse m[14] se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$. Ce corps est soumis à l'action d'une force $\vec{F}$.



L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$d(m\,\vec{v})/dt = \vec{F} \qquad (2.1)$$

La variation d'énergie est égale au travail de la force :

$$dW = \vec{F}\,(\vec{v}\,dt)$$

L'équation (2.1) peut donc s'écrire :

$$\vec{v}\;d(m\,\vec{v}) = dW \qquad (2.2)$$

Posons : $dv = d(\|\vec{v}\|)$. Compte tenu du principe d'équivalence entre masse et énergie ($W = m\,\mathbf{c}^2$) et du fait que $\vec{v}\;d\,\vec{v} = v\,dv$ (car $dv \approx \|d\,\vec{v}\|\cos\theta$), il vient :

$$(v\,dv/\mathbf{c}^2)\,W + (v^2/\mathbf{c}^2)\,dW = dW$$

soit :

$$dv = (1 - v^2/\mathbf{c}^2)\,(\mathbf{c}^2/v)\,dW/W \qquad (2.3)$$

Nous allons montrer qu'il est possible d'obtenir cette dernière équation à partir des propriétés du champ gravitationnel exposées au chapitre 1.

2.2. Etablissement de l'équation fondamentale de la dynamique à partir du champ

Considérons un corps de masse m et d'énergie totale W ayant une vitesse v dans le référentiel Σ. Ce corps subit une impulsion lui transférant un incrément d'énergie ΔW pendant la période T qui rythme l'ajustement du champ (cf. paragraphe 1.3.1). Nous cherchons son incrément de vitesse Δv.

Dans le référentiel Σ' où le corps est au repos, la limite de Schwarzschild est constituée par une sphère de rayon R_g.

[14] Dans ce chapitre, nous employons le terme « corps » pour désigner les sources de champ gravitationnel car le raisonnement s'applique quelle que soit la taille de ces corps. Rappelons d'autre part qu'on ne réserve pas le terme « masse » à la masse au repos.

Nous avons vu que R_g est proportionnel à W (équation (1.13)). L'incrément d'énergie ΔW accroît donc le rayon de Schwarzschild d'une quantité ΔR_g telle que :

$$\Delta R_g / R_g = \Delta W / W \tag{2.4}$$

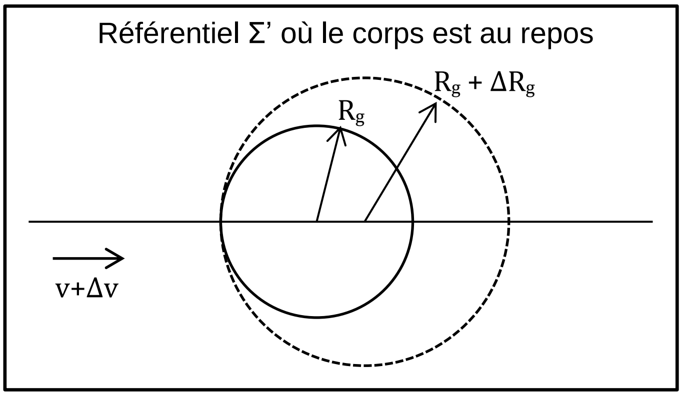


figure 3

On peut faire l'hypothèse que l'accroissement de rayon s'accompagne d'un déplacement de la sphère tel que le montre la figure 3 : la sphère de rayon $R_g + \Delta R_g$ vient tangenter la sphère de rayon R_g. Le centre de la sphère se déplace alors de la quantité ΔR_g. Cela revient à considérer que le corps est limité dans son déplacement par l'impossibilité d'interagir avec son propre champ. Il suffit de déterminer la durée associée au déplacement ΔR_g pour en déduire le supplément de vitesse du corps.

A la période T correspond dans Σ un déplacement du centre du champ de O en O_1 tel que : $OO_1 = v\,T$.

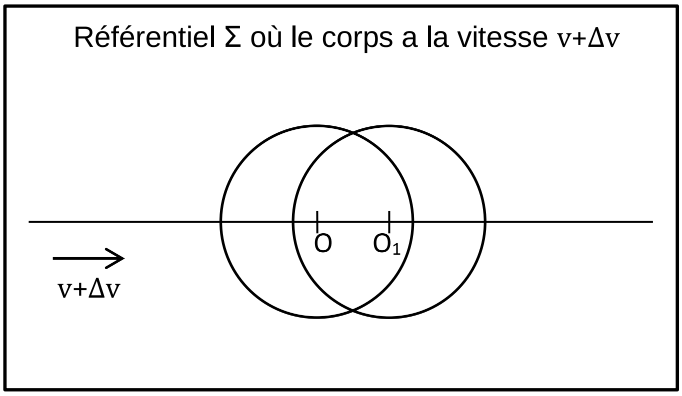


figure 4

Puisque nous supposons que le champ s'établit à la vitesse c, l'ajustement sur une distance égale à OO_1 s'effectue en un temps :

$$\Delta T = v\,T/\mathbf{c}.$$

C'est pendant cette même durée que va s'opérer l'ajustement du rayon à sa nouvelle valeur lorsque qu'une impulsion est donnée.

Nous avons fait le choix : $T = R_g/\mathbf{c}$ (cf. équation (1.14)).

Donc : $\Delta T = v\, R_g/\mathbf{c}^2$

L'incrément de vitesse dans le référentiel Σ' est :

$$\Delta u = dR_g /\Delta T = (\mathbf{c}^2/v)\ \Delta R_g/R_g \quad (2.5)$$

La loi de composition des vitesses conduit à l'incrément suivant dans le référentiel Σ :

$$\Delta v = (1 - v^2/\mathbf{c}^2)\ \Delta u = (1 - v^2/\mathbf{c}^2)\ (\mathbf{c}^2/v)\quad \Delta R_g/R_g$$

soit : $$\Delta v = (1- v^2/\mathbf{c}^2)\ (\mathbf{c}^2 /v)\ \Delta W/W \quad (2.6)$$

ce qui constitue bien le résultat recherché.

Que se passe-t-il si le corps de masse m *ne peut pas être considéré comme une source gravitationnelle unique ?*

Le raisonnement ci–dessus s'applique à chaque fraction de masse m_e source d'un champ défini à partir d'un point central unique. On retrouve globalement le résultat (2.1) si, pour toute masse élémentaire, la vitesse est identique (= v) et le ratio $\Delta W_e/W_e$ identique (= $\Delta W/W$). C'est-à-dire dans le cas d'un corps rigide.

Remarque : l'hypothèse de l'existence des trous noirs implique que des masses sources de champs gravitationnels distincts peuvent fusionner en une source unique.

2.3. Partage de l'énergie potentielle dans notre approche de la gravitation

A partir du raisonnement tenu au paragraphe 2.2 il est possible de justifier le troisième principe *retenu dans notre nouvelle approche de la gravitation :*

« L'énergie au repos d'une particule de masse non nulle varie avec sa distance à la source. En l'absence de forces extérieures, la variation d'énergie associée à l'énergie au repos et la variation d'énergie associée à la quantité de mouvement sont chacune égale et opposée à la moitié de la variation de l'énergie potentielle ».

En effet, l'énergie gravitationnelle reçue par la source est à rapporter à une durée $2T$. L'équation (2.2) devient donc :

$$\Delta T = 2\ v\ R_g/\mathbf{c}^2$$

Et l'équation (2.3) devient :

$$v\ dv/\mathbf{c}^2/(1- v^2/\mathbf{c}^2) = (dW/2)/W$$

On peut bien considérer que la variation de vitesse est liée à la moitié de la variation d'énergie, l'autre moitié devant par conséquent être affectée à la variation d'énergie liée à la masse au repos.

3. Champ gravitationnel et Mécanique quantique

3.1. Comportement ondulatoire

3.1.1. Hypothèse de Louis de Broglie

Une onde électromagnétique de fréquence ν peut être considérée comme constituée de photons (quanta d'énergie $\mathbf{h}\,\nu$), émis à la fréquence ν.

Inversement, à un photon même isolé, d'énergie E_φ, on peut associer une onde de fréquence $E_\varphi/\mathbf{h}$, qui permet notamment de rendre compte du comportement ondulatoire du photon.

Louis de Broglie a étendu ce comportement ondulatoire aux particules de masse non nulle : à une particule au repos de masse m_0, il associe un phénomène périodique de fréquence ν_0 telle que :

$$m_0\,\mathbf{c}^2 = \mathbf{h}\,\nu_0 \tag{3.1}$$

Considérant que cette équation doit être invariante par la transformation de Lorentz, il est conduit à définir ce phénomène périodique comme une onde dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous (en comparaison avec celles des photons) :

	photon	Particule matérielle (masse m, vitesse v)
énergie	$E = \mathbf{h}\,\nu$	$E = \mathbf{h}\,\nu = m\,\mathbf{c}^2$
quantité de mouvement	$p = E/\mathbf{c}$	$p = m\,v = E\,v/\,\mathbf{c}^2$
longueur d'onde	$\lambda = \mathbf{h}/p = \mathbf{c}/\nu$	$\lambda = \mathbf{h}/p = (\mathbf{c}^2/v)/\nu$

A une particule en mouvement à la vitesse v, on peut ainsi associer une onde ayant pour fréquence $\nu = m\,\mathbf{c}^2/\mathbf{h}$ [15] , pour vitesse $V = \mathbf{c}^2/v$ et pour longueur d'onde :

$$\lambda = \mathbf{h}/mv \tag{3.2}$$

Ayant une vitesse supérieure à $\mathbf{c}$, cette onde ne peut pas transporter d'énergie. De Broglie la qualifie « d'onde de phase » associée à la propagation de la particule car, pour un observateur fixe, il y a accord entre la phase de l'onde et la phase d'une horloge qui a la fréquence ν_0 dans le référentiel lié à la particule.[16]

L'onde de phase permet d'expliquer le comportement ondulatoire des particules matérielles. La relation (3.2) a été vérifiée par plusieurs expériences de diffraction d'électrons, mais aussi de particules plus massives.

[15] On rappelle que m est la masse correspondant à l'énergie totale de la particule. Pour nous, m désigne donc aussi la masse au repos dans le référentiel où la particule est immobile. De Broglie écrit : $\nu = \gamma\,m_0\,\mathbf{c}^2/\mathbf{h}$.
[16] *Recherches sur la théorie des quanta*, Thèse de doctorat soutenue à Paris le 25 novembre 1924.

3.1.2. Théorie de la double solution et onde pilote

Louis de Broglie présente de la façon suivante sa conception de la mécanique ondulatoire :

« Au moment où en 1923-1924 j'ai développé les résultats qui figurent dans ma Thèse de Doctorat, je suis parti de l'idée qu'il fallait étendre à toutes les particules la coexistence des ondes et des particules découverte en 1905 par Einstein pour la lumière dans sa théorie des quanta de lumière (photons). Pour y arriver il me paraissait indispensable d'adopter l'image physique d'une onde, sans doute de très faible intensité, qui transporterait les particules conçues comme de grosses concentrations locales d'énergie incorporée dans l'onde. » [17]

Sur cette base, il propose en mai 1927 la « théorie de la double solution ». [18] Cette théorie conduit à concevoir l'onde associée à la particule comme guidant son mouvement : c'est une onde pilote.

Compte tenu du développement purement probabiliste de l'interprétation de la Mécanique quantique, l'idée d'une onde pilote ayant une réalité physique fut mise de côté. Elle ne sera reprise qu'après 1950 et développée par David Bohm.[19]

Nous allons maintenant définir les caractéristiques des ondes gravitationnelles, puis montrer que ces caractéristiques leur permettent de jouer le rôle d'onde pilote.

3.2. Caractéristiques des ondes gravitationnelles

3.2.1. Quantum d'énergie gravitationnelle

Au chapitre 1 nous avons associé aux ondes gravitationnelles une période $T = R_g/\mathbf{c}$ qui commande le rafraîchissement et l'oscillation du champ gravitationnel. D'autre part nous avons vu que ces ondes transportent (à la limite de Schwarzschild) une énergie égale à l'énergie totale W de la source.

Nous postulons que l'énergie émise ou reçue à chaque rafraîchissement du champ constitue un quantum indivisible. Mais, l'énergie transportée variant en $1/r$, l'énergie du quantum varie avec l'éloignement de la source :

$$W_q(r) = (R_g/r)\, W$$

Par extension de la relation de Planck-Einstein pour les photons, nous postulons, qu'à tout quantum d'énergie gravitationnelle W on peut associer un fragment d'onde dont la fréquence ν_S vérifie la relation :[20]

$$W = \mathbf{h}\, \nu_S \qquad (3.3)$$

---

[17] *Louis de Broglie, sa conception du monde physique,* Gauthier-Villars Ed, 1973

[18] Louis de Broglie, *La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement*, Le journal de Physique et le radium, mai 1927.

[19] D. Bohm & B.J. Hiley, *The undivided universe*, Routledge Ed, 1993.

[20] Noter que la fréquence est associée au quantum d'énergie de l'onde gravitationnelle et non directement à l'énergie de la particule.

L'onde gravitationnelle peut être vue comme une succession de quanta d'énergie $\mathbf{h}\nu_S$ (à l'origine) émis (ou reçus) à la fréquence $1/2T$. **C'est la fréquence ν_S, et non la fréquence d'émission, qui commande le comportement ondulatoire des quanta.**

L'analogie entre photons et quanta d'énergie gravitationnelle ne peut pas être étendue à une analogie complète entre ondes électromagnétiques et ondes gravitationnelles car, pour ces dernières, la fréquence liée à l'énergie des quanta (ν_S) et la fréquence d'émission ($1/2T$) sont distinctes :

ν_S est proportionnel à m, $1/2T$ est proportionnel à $1/m$. [21]

Remarque : pour une onde électromagnétique déplaçant des photons d'énergie constante, la puissance varie comme le carré de la fréquence [22], alors que, pour une onde gravitationnelle, c'est l'énergie du quantum qui varie comme le carré de la fréquence (à une distance r donnée).

Equations des ondes

Admettons que, dans le référentiel Σ' où la source est au repos, on puisse associer à la propagation des quanta une fonction d'onde sinusoïdale ayant pour pulsation :

$$\omega_S = 2\pi\, \nu_S$$

Les équations de propagation s'écrivent :

- pour l'onde sortante : $U_s(\overrightarrow{r'},t') = A(r') \sin(\omega_S (t' - r'/\mathbf{c}))$ (3.4)
- pour l'onde entrante : $U_e(\overrightarrow{r'},t') = - A(r') \sin(\omega_S (t' + r'/\mathbf{c} - 4R_g/\mathbf{c}))$

On a : $U_s(R_g, R_g/\mathbf{c}) = 0$ et $U_e(3R_g, R_g/\mathbf{c}) = 0$,

ce qui assure le décalage de phase adéquat entre onde entrante et onde sortante.

Que représentent U_s *et* U_e *?*

Compte tenu de la remarque faite plus haut et par analogie avec le vecteur de Poynting qui donne la puissance par unité de surface d'une onde électromagnétique, posons la relation suivante entre l'énergie du quantum gravitationnel par unité de surface et U_s (ou U_e) :

$$W_q(r') / 4\pi r'^2 = k \,\mathrm{moy}\,(U_s^2) \tag{3.5}$$

$\mathrm{moy}(\,)$ représentant la moyenne temporelle sur une durée égale à la période de l'onde.

Donc : $\mathrm{moy}\,(U_s^2) = A(r')^2/2$

Pour exprimer l'énergie d'interaction du champ gravitationnel (cf. paragraphe 1.2.2 Interaction de deux sources), nous avions retenu : $k = 1/ 4\pi G$.
Pour tenir compte de la dissipation d'énergie de l'onde, il faut multiplier cette valeur par $1/r'$:

$$k = 1/ 4\pi G r'$$

[21] Nous reviendrons sur cette différence au paragraphe 3.3.4.
[22] cf. note intitulée *« Une autre approche de la relativité »*, paragraphe 4.2.2.

Avec cette valeur de k, on tire de l'équation (3.5) l'expression suivante pour $A(r')^2$:

$$A(r')^2 = 4\, G^2\, m^2/r'^2$$

A(r') peut donc être identifié au potentiel (cf. équation (3.11)) :

$$A(r') = -\,2\, Gm/r' \qquad (3.6)$$

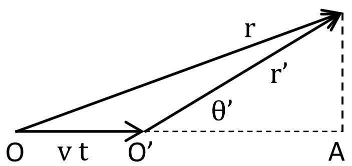
3.2.2. <u>Source en mouvement</u>

Considérons maintenant que la particule de masse m, source du champ gravitationnel, est en mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse v dans le référentiel Σ (x,y,z,t). Nous choisissons l'axe x parallèle à la vitesse.

La conjugaison des ondes entrante et sortante conduit à l'équation :

$$U(\vec{r'},t') = -\,2\, A(r')\, \sin(\omega_S\, (r'/\mathbf{c} + 2R_g/\mathbf{c}))\, \cos\, (\omega_S\, (t' - 2R_g/\mathbf{c})) \qquad (3.7)$$

ce qui constitue l'équation d'une onde stationnaire.



OA = x
O'A = x'

Les équations de changement de référentiel entre Σ' et Σ s'écrivent [23] :

$$x' = x - v\,t$$
$$t' = t - v\,x/\mathbf{c}^2$$

En désignant par θ' l'angle du rayon $\vec{r'}$ par rapport à $\vec{v}$:

$$r' = x'/\cos\theta' = (x - v\,t)/\cos\theta'$$

Et : $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{v}\,t$

Dans le référentiel Σ, l'équation (3.7) de l'onde résultante devient donc :

$$U(x, \theta', t) = -\,2\, A(r')\, \sin\, (\omega_S\, ((x - v\,t)\, /\mathbf{c} \cos\theta' + 2R_g/\mathbf{c}))\, \cos\, (\omega_S\, (t - v\,x/\mathbf{c}^2 - 2R_g/\mathbf{c})) \qquad (3.8)$$

$$U(x, \theta', t) = 2\, A(r')\, \sin\, ((v\, /\mathbf{c} \cos\theta')\, \omega_S\, (t - x/v - 2R_g \cos\theta'/v)) \cos(\omega_S\, (t - x/(\mathbf{c}^2/v) - 2R_g/\mathbf{c}))$$

ou encore, en fonction de $\vec{r}$:

$$U(\vec{r},t) = -\,2\, A(\|\vec{r} - \vec{v}t\|)\, \sin\, (\omega_S\, (\|\vec{r} - \vec{v}t\|/\mathbf{c} + 2R_g/\mathbf{c}))\, \cos\, (\omega_S\, (t - \vec{v}.\vec{r}/\mathbf{c}^2 - 2R_g/\mathbf{c})) \qquad (3.8')$$

Cette équation combine une onde de groupe et une onde de phase, qui peuvent être considérées comme des ondes planes se propageant dans la direction de la vitesse de la particule :

- l'onde de groupe $[2\, A(r')\, \sin\, ((v\, /\mathbf{c} \cos\theta')\, \omega_S\, (t - x/v - 2R_g \cos\theta'/v))]$ présente une fréquence $[(v\, /\mathbf{c}|\cos\theta'|)\nu_S]$ qui varie avec la direction de rayonnement considérée

[23] cf. note *« Une autre approche de la relativité »*, § 2.4. Le référentiel de base est Σ' et Σ se déplace à la vitesse - v par rapport à lui.

(dans Σ’). Elle a pour vitesse v, comme la particule dont elle accompagne le mouvement ; c’est elle qui déplace l’énergie ;

- l’onde de phase $[\cos(\omega_S(t - x/(\mathbf{c}^2/v) - 2R_g/\mathbf{c}))]$ a la même fréquence que les ondes gravitationnelles dans Σ’ : ν_S, et sa vitesse est égale à $\mathbf{c}^2/v$.

On voit tout de suite que l’onde de phase remplit les conditions de l’hypothèse de De Broglie :

- sa fréquence est : $\nu_S = m\mathbf{c}^2/h$
- sa vitesse vaut : $\mathbf{c}^2/v$.

Remarque : La longueur d’onde des ondes gravitationnelles est :

$$\lambda_S = \mathbf{c}/\nu_S = \mathbf{h}/m\mathbf{c} \tag{3.9}$$

Il s’agit là de la longueur d’onde de Compton, qui est également la longueur d’onde de l’onde de groupe pour θ’ = 0.

3.2.3. Energie déplacée

Dans le référentiel Σ où la source est en mouvement, l’onde résultante déplace en un temps Δt une énergie égale[24] (en valeur absolue) à celle contenue dans une tranche plane infinie perpendiculaire à v et d’épaisseur $v\,\Delta t$ (telle que figurée ci-après dans l’hypothèse où : $v\,\Delta t < R_g$).

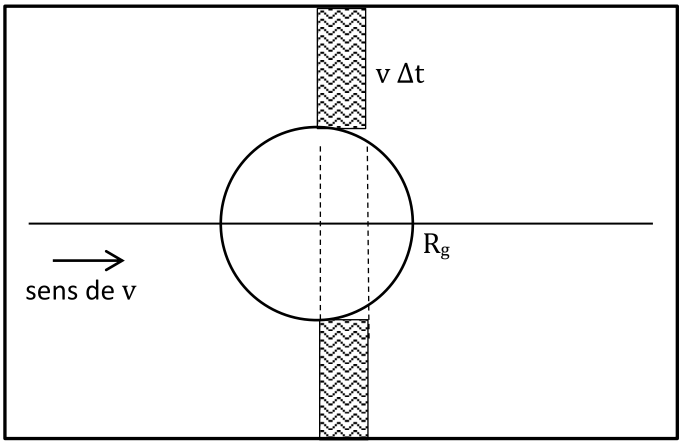
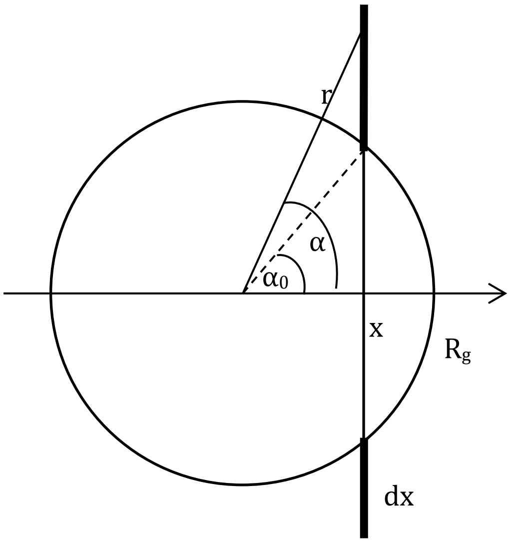


figure 6

Calculons d’abord l’énergie $dW_g(x)$ contenue dans une tranche plane d’épaisseur dx du champ gravitationnel perpendiculairement à la direction du mouvement, à une distance x du centre de la source inférieure au rayon de Schwarzschild $R_g = 2\,Gm/\mathbf{c}^2$.

[24] Rappelons que l’énergie moyenne du champ est égale à la moitié de celle de la source et indépendante du référentiel galiléen considéré.



La densité d'énergie du champ a pour valeur (cf. (1.9)):

$\delta W_g(r) = (R_g/4\pi\, r^4)\, W_g = G\, m^2/(4\pi\, r^4)$

$dW(x) = dx \int_{\alpha 0}^{\Pi/2} (G\, m^2/ (4\pi\, r^4))\, (2\pi\, x\, tg\, \alpha)\, x\, d(tg\, \alpha)$

Puisque $r = x /\cos\alpha$:

$dW(x) = -\, dx\, (Gm^2/2x^2) \int_{\alpha 0}^{\Pi/2} \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha$

$dW(x) = -\, dx\, (Gm^2/4\, x^2)\, (\sin^2(\pi/2) - \sin^2 \alpha_0)$

Puisque $R_g = x /\cos\alpha_0$:

$$dW(x) = dx\, (Gm^2/4\, R_g^2) = dx\, (\mathbf{c}^4/16G) \qquad (3.10)$$

Remarque : tant que la tranche intercepte la limite de Schwarzschild, l'énergie contenue dans la tranche est proportionnelle à son épaisseur et indépendante de la masse source du champ gravitationnel. Mais, pour une épaisseur $\Delta x = R_g$, on retrouve bien une proportionnalité à la masse comme attendu.

Pour une durée de déplacement égale à 2T, le déplacement vaut : $\Delta x = 2v\, T = 2v\, R_g/\mathbf{c}$

$$(3.10) \rightarrow \qquad \Delta W_g = (2v/\mathbf{c})\, (Gm^2/4R_g) = m\, \mathbf{c}\, v/4 \qquad (3.11)$$

On vérifie facilement que ce résultat est à multiplier par R_g^2/x^2 si on se place à une distance $x > R_g$.

Ainsi, on peut considérer que, pendant une durée égale à 2T :

- les ondes gravitationnelles émettent et prélèvent une énergie égale à $m\, \mathbf{c}^2$;
- à la distance x dans le référentiel Σ, tout se passe comme si l'onde résultante déplaçait une énergie égale à $(R_g/x)^2\, m\, \mathbf{c}\, v/4$.

3.3. Onde gravitationnelle résultante en tant qu'onde pilote

3.3.1. Trajectoire de la particule

Nous avons vu que l'onde résultante satisfaisait l'hypothèse de de Broglie. Peut–elle jouer le rôle d'onde pilote pour définir la trajectoire de la particule ?

Considérons le facteur de phase :

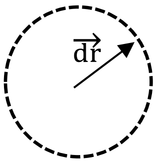
$$S = \omega_S\, (t - \vec{v} \cdot \vec{r}\, /\mathbf{c}^2) = (m/\hbar)\, (\mathbf{c}^2\, t - \vec{v} \cdot \vec{r}\,)$$

On voit immédiatement que la vitesse de la particule s'exprime par la relation :

$$\vec{v} = -\, (\hbar/m)\ \overrightarrow{grad}\, S \qquad (3.12)$$

L'onde de phase de l'équation (3.8') s'écrit :

$$\boldsymbol{P} = \cos\,(S - 2\,\omega_S\,R_g/\mathbf{c})$$



Considérons la sphère de rayon dr centrée sur la position de la particule à un instant donné. Sur cette sphère, la valeur de l'onde de phase est $\boldsymbol{P}$ + d$\boldsymbol{P}$, avec :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{P} = -\sin\,(S - 2\,\omega_S\,R_g/\mathbf{c})\;\mathrm{d}S$$

soit: $\mathrm{d}\boldsymbol{P} = -\sin\,(S - 2\,\omega_S\,R_g/\mathbf{c})\;(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,S\,.\,\overrightarrow{\mathrm{dr}})$

(3.12) → $$\mathrm{d}\boldsymbol{P} = (m/\hbar)\,\sin\,(S - 2\,\omega_S\,R_g/\mathbf{c})\;(\vec{v}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{dr}})$$

Sur la trajectoire de la particule, on a : $\overrightarrow{\mathrm{dr}} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$. Ce qui implique que d$\boldsymbol{P}$ atteint son extremum.

On peut donc considérer que la particule se déplace, à chaque ajustement du champ, en direction de l'extremum de l'onde de phase (sur la limite de Schwarzschild).

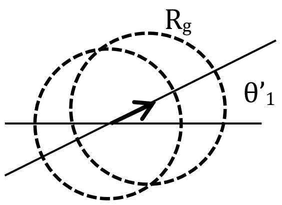
Dans le référentiel Σ, à l'instant t_0, la particule a pour abscisse x_0. Les points de la sphère de Schwarzschild associée ont pour abscisse :

$$x = x_0 + R_g \cos\theta'$$

Reprenons l'équation (3.8). Sur la sphère de Schwarzschild à l'instant $t_1 = t_0 + R_g/\mathbf{c}$, avec $r' = R_g$, elle devient :

$$U\,(x_0, \theta', t_1) = -\,2\,A(R_S)\,\sin(3\,\omega_S\,R_g\,/\mathbf{c})\,\cos(\omega_S\,(t_0 - R_g/\mathbf{c} - v(x_0 + R_g\cos\theta')\,/\mathbf{c}^2)) \qquad (3.13)$$

On voit immédiatement que la dérivée $\partial U/\partial\theta'$ comporte sin θ' en facteur et s'annule pour θ' = 0. U présente donc un extrémum pour θ' = 0. En l'absence de perturbation de la propagation de l'onde, cela correspond bien à un déplacement rectiligne.



En cas d'interaction, la dérivée peut s'annuler pour un angle $\theta'_1 \neq 0$ et il faut introduire une autre coordonnée angulaire φ_1. Les coordonnées de la particule à l'instant t_1 seront :

$$(x_1 = x_0 + v\,R_g\cos\theta'_1/\mathbf{c},\ \theta'_1,\ \varphi_1)$$

La trajectoire se construit donc par tronçons successifs. Dans l'interprétation proposée ci-dessus, il s'agit de segments de droite, associés aux ajustements du champ comme dans l'analyse développée au chapitre 2.

Remarque : c'est la distribution d'amplitude de l'onde pilote à la limite de Schwarzschild qui commande le mouvement de la particule. Toute perturbation de cette distribution peut engendrer une déviation de la trajectoire. Une telle déviation peut notamment résulter de phénomènes d'interférence, comme nous l'expliquons au paragraphe suivant.

3.3.2. Interférence

L'association de l'onde pilote à la particule permet d'expliquer les phénomènes d'interférence dès lors que l'on admet que cette onde peut être diffractée.

Dans les expériences qui ont été réalisées, l'interférence est obtenue en retenant des paramètres (largeur et espacement des fentes) calés sur la longueur d'onde de l'onde de phase. Notons que l'onde de groupe présente une longueur d'onde généralement beaucoup plus faible (dans le rapport $v/\mathbf{c}$).

En cas d'interposition d'un écran percé de deux fentes sur le trajet des particules, chaque particule passe par une seule des fentes, mais la diffraction de l'onde de phase provoque un phénomène d'interférence. Il en résulte une déviation de la trajectoire de la particule à chaque rafraîchissement du champ en direction de l'extremum local de l'onde de phase, comme cela a été expliqué au paragraphe précédent.

Comme dans la mécanique bohmienne, les trajectoires dépendent des conditions initiales de la particule. La succession des particules dessine progressivement la figure d'interférence.

3.3.3. Equation différentielle de propagation

Remarque concernant l'équation de Schrödinger :

En physique quantique, l'équation de Schrödinger donne l'évolution de la fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$ associée à une particule. Pour une particule libre, non relativiste, elle s'écrit :

$$i\,\hbar\,\partial\psi/\,\partial t = -\,(\,\hbar^2/2\,m_0)\,\Delta\psi \qquad (3.14)$$

Cette équation est souvent présentée comme admettant une solution du type « onde de De Broglie » :

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0\,\exp((-\,i/\hbar)(E\,t - \vec{p}\,\vec{r}\,))$$

Il s'agit là d'un abus de langage car, si l'onde considérée a bien une longueur d'onde égale à $\mathbf{h}/\,m_0\,v$, sa fréquence et sa vitesse l'écartent complètement de l'hypothèse de De Broglie. Cela est dû au fait que l'énergie prise en compte est l'énergie cinétique et non l'énergie totale de la particule ($E = m\mathbf{c}^2$).

La propagation d'une onde satisfaisant pleinement l'hypothèse de De Broglie peut-elle être décrite par l'équation de Schrödinger ? Sur la base de travaux menés par Asim Barut, Laurent Bindel a proposé une réponse affirmative à cette question : une solution possible de l'équation de Schrödinger est une onde plane de de Broglie modulée en amplitude par une onde progressive solution d'une équation de Helmholtz.[25]

Nous inspirant de cette approche, nous allons montrer que l'onde pilote est solution d'une équation différentielle proche de l'équation de Schrödinger.

[25] L. Bindel, *Mécanique Quantique Non-Relativiste d'une Particule Individuelle*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 37, 2012.

Solution faisant appel à une équation de Schrödinger modifiée :

Montrons que la fonction d'onde (3.7) (3.8) est solution d'une équation obtenue :

- en écrivant l'équation de Schrödinger avec la masse m, représentative de l'énergie totale, et non la masse au repos m_0 ;
- en ajoutant un terme en ψ au second membre:

$$i \hbar\, \partial\psi/ \partial t = - (\hbar^2/ 2 m)\Delta\psi + \alpha\, \psi \qquad (3.15)$$

L'équation de propagation que nous allons établir sera valable quelle que soit la vitesse de la particule, relativiste ou non-relativiste.

Mise sous forme complexe, la fonction d'onde (3.7) est le produit de deux fonctions : $\psi = \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{P}$,

avec : $\boldsymbol{G} = - 2 A(r') \sin(\omega_S (r'/ \mathbf{c} + 2R_g/\mathbf{c}))$ (onde de groupe)

$\boldsymbol{P} = \exp (- i(\omega_S (t - \vec{v}\,\vec{r} / \mathbf{c}^2 - 2R_g/\mathbf{c}))$ (onde de phase)

$= \exp ((- i/ \hbar)(E\, t - \vec{p}\,\vec{r} - 2\, E\, Rg/\mathbf{c}))$

Nous avons : $\partial\psi/ \partial t = (\partial\boldsymbol{G}/ \partial t)\, \boldsymbol{P} - i\, \omega_S\, \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{P}$

Puisque les dérivées partielles de $\boldsymbol{P}$ par rapport aux coordonnées y et z sont nulles, le laplacien de ψ se réduit à :

$$\Delta\psi = \Delta\boldsymbol{G}\, \boldsymbol{P} + 2\, (\partial\boldsymbol{G}/ \partial x)\, (\partial\boldsymbol{P}/ \partial x) + \boldsymbol{G}\, (\partial^2\boldsymbol{P}/ \partial x^2)$$

avec : $\partial\boldsymbol{P}/ \partial x = i\, (\omega_S\, v/\mathbf{c}^2)\, \boldsymbol{P}$ et $\partial^2\boldsymbol{P}/ \partial x^2 = - (\omega_S\, v/\mathbf{c}^2)^2\, \boldsymbol{P}$

soit : $\Delta\psi = (\Delta\boldsymbol{G} + 2i\, (\omega_S\, v/\mathbf{c}^2)\, (\partial\boldsymbol{G}/ \partial x) - (\omega_S\, v/\mathbf{c}^2)^2\, G)\, \boldsymbol{P}$

En séparant parties réelle et imaginaire, l'équation (3.12) se ramène au système d'équations :

$$\Delta\boldsymbol{G} + (2\, (m/\hbar)(\omega_S - \alpha/\hbar) - (\omega_S\, v/\mathbf{c}^2)^2)\, \boldsymbol{G}= 0$$

$$(\partial\boldsymbol{G}/ \partial t) + (\hbar/m)\, (\omega_S\, v/\mathbf{c}^2)\, (\partial\boldsymbol{G}/ \partial x) = 0$$

En tenant compte de la relation $\omega_S = m\mathbf{c}^2/ \hbar$, ces équations deviennent :

$$\Delta\boldsymbol{G} + (2\, ((\omega_S /\mathbf{c})^2 - (\alpha/\hbar)\, \omega_S /\mathbf{c}^2) - (\omega_S /\mathbf{c})^2(v^2/\mathbf{c}^2))\, \boldsymbol{G}= 0 \qquad (3.16)$$

$$(\partial\boldsymbol{G}/ \partial t) + v\, (\partial\boldsymbol{G}/ \partial x) = 0 \qquad (3.17)$$

L'équation (3.17) est satisfaite par $\boldsymbol{G}$ car cette fonction a pour variable :

$r' = ((x - v\, t)^2 +y^2 +z^2)^{1/2}$ Donc $\boldsymbol{G}$ est fonction de $(x - v\, t)$.

Cherchons α tel que le coefficient de $\boldsymbol{G}$ dans l'équation (3.16) soit égal à $(\omega_S /\mathbf{c})^2$:

$$(\omega_S /\mathbf{c})^2(1 - v^2/\mathbf{c}^2)) = 2\, (\alpha/\hbar)\, \omega_S /\mathbf{c}^2$$

$$\alpha = \hbar\, \omega_S\, (1 - v^2/\mathbf{c}^2)/2 = m(\mathbf{c}^2 - v^2)/2$$

L'équation (3.16) s'écrit finalement :

$$\Delta \boldsymbol{G} + (\omega_S / \mathbf{c})^2 \boldsymbol{G} = 0 \qquad (3.18)$$

Il s'agit d'une équation de Helmholtz.

Avec $A(r') = - 2\, G\, m / r'$ (cf. paragraphe 3.2.1.), la fonction $\boldsymbol{G}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{G} = - 4\, (G\, m / r')\, \sin\, ((\omega_S / \mathbf{c})(r' + 2R_g))$$

Elle présente une pulsation égale à $\omega_S / \mathbf{c}$ et vérifie bien l'équation (3.15) : elle s'identifie à une solution à symétrie sphérique de cette équation.

La fonction décrivant l'onde pilote dans le référentiel Σ est donc solution de l'équation :

$$i\, \hbar\, \partial\psi / \partial t = - (\hbar^2 / 2\, m) \Delta\psi + m\, (\mathbf{c}^2 - v^2)\, \psi / 2 \qquad (3.19)$$

3.3.4. Limite du comportement ondulatoire

Nous avons vu que la fréquence liée à l'énergie des quanta d'énergie gravitationnelle (ν_S) et la fréquence d'émission (1/2T) sont distinctes.

Le ratio entre ces fréquences vaut :

$$\nu_S / (1/2T) = (m\mathbf{c}^2 / \mathbf{h}) / (\mathbf{c}^3 / 4\, Gm) = 4\, m^2\, (G / \mathbf{hc})$$

En introduisant la masse de Planck [$m_p = (\hbar \mathbf{c} / G)^{1/2}$], ce ratio s'écrit :

$$\nu_S / (1/2T) = (2/\pi)\, (m/m_p)^2 \qquad (3.20)$$

Si on se réfère au ratio défini par l'équation (3.2), on peut noter que les expériences permettant de vérifier l'hypothèse de De Broglie ont toutes mis en jeu des particules de masse très petite devant la masse de Planck, pour lesquelles la fréquence des ondes gravitationnelles est très inférieure à la fréquence de rafraîchissement. **Peut-être le ratio égal à 1 constitue-t-il une limite pour la manifestation d'un comportement ondulatoire des particules ?**

Au stade auquel nous sommes parvenus, nous pouvons conclure qu'il est possible d'expliquer le comportement d'une particule en mouvement par ses propriétés gravitationnelles :

- **modification de sa vitesse en cas de modification de son énergie, conformément à la loi fondamentale de la dynamique ;**
- **comportement ondulatoire associé aux ondes gravitationnelles qui l'accompagnent.**

Annexe

Principes retenus pour établir les lois de la gravitation pour une particule de masse non nulle en champ faible[26]

Premier principe : champ gravitationnel et énergie potentielle

La gravitation créée par une source gravitationnelle de masse m peut être caractérisée par un champ gravitationnel conférant une énergie potentielle aux particules qui y sont présentes.

La variation de l'énergie potentielle d'une particule, de masse nulle ou non nulle, est proportionnelle à l'énergie totale E de celle-ci, calculée dans le référentiel lié à la source ; elle est donnée par la relation :

$$dE_g = 2\ (Gm/\ \mathbf{c}^2 r^2)\ E\ dr$$

Deuxième principe : conservation de l'énergie

La variation d'énergie totale d'une particule est égale à l'opposé de la variation d'énergie potentielle majorée du travail des forces extérieures s'il y a lieu :

$$dE = dE_x - dE_g$$

Troisième principe : influence de la gravitation sur l'énergie et la quantité de mouvement d'une particule

L'énergie au repos d'une particule de masse non nulle varie avec sa distance à la source.

En l'absence de forces extérieures, la variation d'énergie associée à l'énergie au repos et la variation d'énergie associée à la quantité de mouvement sont chacune égale et opposée à la moitié de la variation de l'énergie potentielle.

Quatrième principe : équivalence entre gravitation et accélération

La loi fondamentale de la dynamique est applicable pour déterminer la relation entre la variation de l'impulsion de la particule et la variation d'énergie associée à cette impulsion sous l'effet du champ gravitationnel.

(Compte tenu du troisième principe, l'équivalence ne peut pas être considérée comme complète)

[26] cf. note *« Une autre approche de la relativité »*, § 5.1.2.